

## 1. Définition



### La réduction à l'absurde

consiste à montrer que la conclusion est vraie, car il serait absurde d'admettre son contraire.

Pour prouver qu'une conclusion est vraie, donc

consistante avec les prémisses données, on va ainsi montrer que la **conclusion niée est inconsistante avec les prémisses** données, c'est-à-dire que **si l'on admet, par hypothèse, la conclusion niée, on peut déduire deux propositions contradictoires.**

Nous aurions ainsi **réduit à l'absurde** l'hypothèse envisagée. Ceci montre alors que l'on ne peut admettre la conclusion niée avec les prémisses et qu'il faut donc admettre son contraire, à savoir la conclusion.

## 2. Conseils

Comme il s'agit de produire une contradiction, on veillera à :

- **décomposer** systématiquement les expressions complexes en des expressions plus simples jusqu'aux propositions élémentaires
- **vérifier** soigneusement à chaque étape si la déduction ne comporte pas déjà une contradiction, sachant qu'elle peut prendre la forme de :
  - deux propositions élémentaires (comme **A et  $\bar{A}$** ), ce qui est le cas habituellement recherché
  - deux propositions complexes ainsi  **$(A \rightarrow B) \wedge C$**  est contradictoire avec  **$\overline{(A \rightarrow B) \wedge C}$**
- **arrêter** la déduction dès la production de la 1ère contradiction
- **écrire** la conclusion recherchée

### 3. Exemple (Ex. 1 p.181)

Étape 1

La conclusion **niée** est ajoutée comme **hypothèse** **additionnelle** aux **prémises**.

- (1)  $(P \wedge Q) \rightarrow (R \wedge S)$   
 (2)  $Q \wedge R \quad \vdash P \rightarrow S$

(3)  $\overline{P \rightarrow S}$  Hyp RA

(4)  $P \wedge \bar{S}$  Ne.Imp 3

(5)  $P$  Simp 4

(6)  $\bar{S}$  Simp 4

(7)  $Q$  Simp 2

(8)  $R$  Simp 2

(9)  $P \wedge Q$  Conj 5;7

(10)  $R \wedge S$  MP 1;9

(11)  $R$  Simp 10

(12)  $S$  Simp 10

(13)  $P \rightarrow S$  RA 6,12

Étape 2

Nous déduisons deux expressions **contraires**.

Étape 3

$S$  et  $\bar{S}$  se contredisent. La conclusion niée mène à une contradiction ce qui signifie qu'il faut donc admettre le contraire (la conclusion non-niée).

Étape 4

Nous notons la conclusion recherchée avec la remarque RA et **en spécifiant les deux lignes qui sont en contradiction**.

#### 3.1. Complétez l'exercice : RA 13

- (1)  $(P \rightarrow S) \rightarrow (Q \rightarrow R)$   
 (2)  $P \wedge Q \quad \vdash S \rightarrow R$   
 (3) Hyp RA  
 (4)  
 (5)  $S$  Simp 4  
 (6)  $\bar{R}$  Simp 4  
 (7)  $P$  Simp 2  
 (8)  $Q$  Simp 2  
 (9)  
 (10)  $P \rightarrow S$  Imp 9  
 (11)  
 (12)  $R$  MP 8 ;11  
 (13)

#### 4. Exemple (RA 14 p.280)

Étape 1

La conclusion niée (double negation) est ajoutée comme hypothèse additionnelle aux prémisses.

- (1)  $A \leftrightarrow B$   
 (2)  $B \rightarrow \overline{C \wedge D}$   
 (3)  $(\overline{D} \vee E) \rightarrow F$   
 (4)  $\overline{F}$   $\vdash \overline{A \wedge C}$

(5)  $A \wedge C$  Hyp RA

(6)  $A$  Simp 5

(7)  $C$  Simp 5

(8)  $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$  Equiv 1

(9)  $A \rightarrow B$  Simp 8

(10)  $B$  MP 6;9

(11)  $\overline{D} \vee E$  MT 3;4

(12)  $D \wedge \overline{E}$  DM 11

(13)  $D$  Simp 12

(14)  $C \wedge D$  Conj 7;13

(15)  $\overline{B}$  MT 2;14

(16)  $\overline{A \wedge C}$  RA 10,15

Étape 2

Nous déduisons deux expressions **contraires**.

Étape 3

$B$  et  $\overline{B}$  se contredisent. La conclusion niée mène à une contradiction ce qui signifie qu'il faut donc admettre le contraire.

Étape 4

Nous notons la conclusion recherchée avec la remarque RA et en **spécifiant les deux lignes qui sont en contradiction**.

#### 4.1. Complétez l'exercice : RA 12

(1)  $\overline{K \rightarrow (L \rightarrow M)}$   $\vdash \overline{(K \rightarrow L) \rightarrow M}$

(2) Hyp RA

(3)

(4)  $K$  Simp 3

(5) Simp 3

(6) Simp 2

(7)  $L$  Simp 6

(8) Simp 6

(9) MT 2;8

(10)

(11)  $\overline{L}$  Simp 10

(12)

**5. Complétez l'exercice : RA 8**

- (1)  $[(A \rightarrow B) \wedge C] \rightarrow D$
- (2)  $A \rightarrow \bar{E}$   $\vdash (C \rightarrow D) \vee \bar{E}$
- (3) Hyp RA
- (4)
- (5)
- (6)
- (7)  $\bar{A}$  MT 2;6
- (8)  $(A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow D)$  Exp 1
- (9)
- (10)  $A \wedge \bar{B}$  Ne.Imp 9
- (11)
- (12)

**6. Complétez l'exercice : RA 1**

- (1)  $(P \wedge K) \vee (P \wedge R)$
- (2)  $H \rightarrow \bar{H}$
- (3)  $(P \wedge S) \rightarrow \overline{Q \vee T}$
- (4)  $\bar{S} \rightarrow H$   $\vdash \bar{T}$
- (5) Hyp RA
- (6)
- (7)
- (8) S MT4 ;7
- (9) Dis 1
- (10)
- (11)  $P \wedge S$  Conj 8 ;10
- (12)
- (13)
- (14)
- (15)  $\bar{T}$  RA 5 ;14